ГУАП

КАФЕДРА №34

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ хор

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

ДОЦЕНТ, КАНД. ФИЗ-МАТ		Царев Ю.Н.
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	фамилия, инициалы

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

по курсу: ОБЩАЯ ФИЗИКА

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛА

СТУДЕНТКА ГР. 3743	16.03.18г	Базаржапова А.Б.
	подпись, дата	фамилия, инициалы

Санкт-Петербург
2018.

Лабораторная работа №4.

Математический и физический маятники.

Протокол измерений

Студент группы 3743

Преподаватель Царёв Ю.Н.

Параметры установки.

Прибор	Цена деления	Предел измерения	Погрешность
Линейка	1 мм	54 см	0,5 мм.
Таймер	0,001 с	99.999 с	0,001 с

Результаты измерений.

Задание №1. Матем. маятник.

l, см \ t, с	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
34	11,735	11,758	11,777	11,760	11,808
25	10,103	10,068	10,048	10,008	10,067

Задание №2 Физич. маятн[ик]

t, с \ x, см	9	10	11	12	13	15	17
t_1, с	11,468	11,447	11,403	11,412	11,408	11,535	11,840
t_2, с	11,508	11,432	11,408	11,402	11,447	11,528	11,810
t_3, с	11,485	11,430	11,430	11,385	11,405	11,534	11,785
$t_{ср}$, с	11,487	11,436	11,414	11,400	11,420	11,532	11,811

[Д]ата: 02.03.2018.

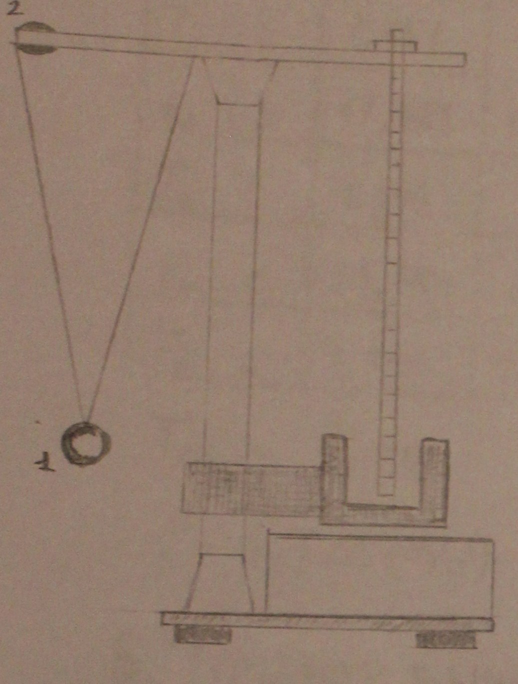
Подпись студента:

Подпись преподавателя:

1. Цель работы:

- определение ускорения свободного падения при помощи математического и физического маятников.

2. Описание лабораторной установки.



Математический маятник выполнен в виде металлического шарика (1) на бифилярном подвесе (2). Длина подвеса измеряется линейкой на стойке (3).

Физический маятник есть металлический стержень (4), на котором крепится подвижная ось - опорная призма (5). Фотодатчик (6) на нижнем кронштейне сигнализирует о прохождении маятником положения равновесия.

3. Рабочие формулы:

$T = \frac{t}{N}$ (1), где T - период колебаний, t - время 10 колебаний, N - количество колебаний

$\tilde{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ (3)

$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ (2)

g - ускорение свободного падения
l - длина
$\tilde{T}$ - средний период.

$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2\sqrt{3}}$ (4) ?

4. Результаты измерений и вычислений.

l = 0,34 м	t, c	11,735	11,758	11,777	11,760	11,808
	T, c	1,174	1,176	1,178	1,176	1,181
	g м/с²	9,739	9,706	9,673	9,706	9,624
l = 0,25 м	t, c	10,103	10,068	10,048	10,008	10,067
	T, c	1,010	1,007	1,005	1,001	1,007
	g м/с²	9,675	9,733	9,772	9,850	9,733

x, м	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,15	0,17
t_1, c	11,468	11,447	11,403	11,412	11,408	11,535	11,840
T_1, c	1,147	1,145	1,140	1,141	1,141	1,154	1,184
t_2, c	11,508	11,432	11,408	11,402	11,447	11,528	11,810
T_2, c	1,151	1,143	1,141	1,140	1,145	1,153	1,181
t_3, c	11,485	11,430	11,430	11,385	11,405	11,534	11,785
T_3, c	1,149	1,143	1,143	1,139	1,141	1,153	1,179
$t_{ср}$, c	11,487	11,436	11,414	11,400	11,420	11,532	11,811
$T_{ср}$, c	1,149	1,144	1,141	1,140	1,142	1,153	1,181

$T_{min} = 1,140$

$g = 9,821$ (м/с²)

5. Пример вычислений:

$T = \frac{11,468}{10} = 1,147$ (по формуле 1)

$\tilde{T} = \frac{1}{4}(1,147 + 1,151 + 1,149 + 1,149) = 1,149$ (по формуле 3)

$g = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,56}{1,140^2 \cdot \sqrt{3}} = 9,821$ (по формуле 4).

6. Расчет погрешностей:

$$\theta_g = \left|\frac{dg}{dL}\right| \cdot \theta_L + \left|\frac{dg}{dT}\right| \cdot \theta_T = \frac{4\pi^2}{T^2}\theta_L + \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L}{T^3} \cdot \theta_T$$

$\theta_L = 0,005$ м – Систематич. погрешность длины

$\theta_T = 0,001$ с – Систематич. погрешность изм. периода.

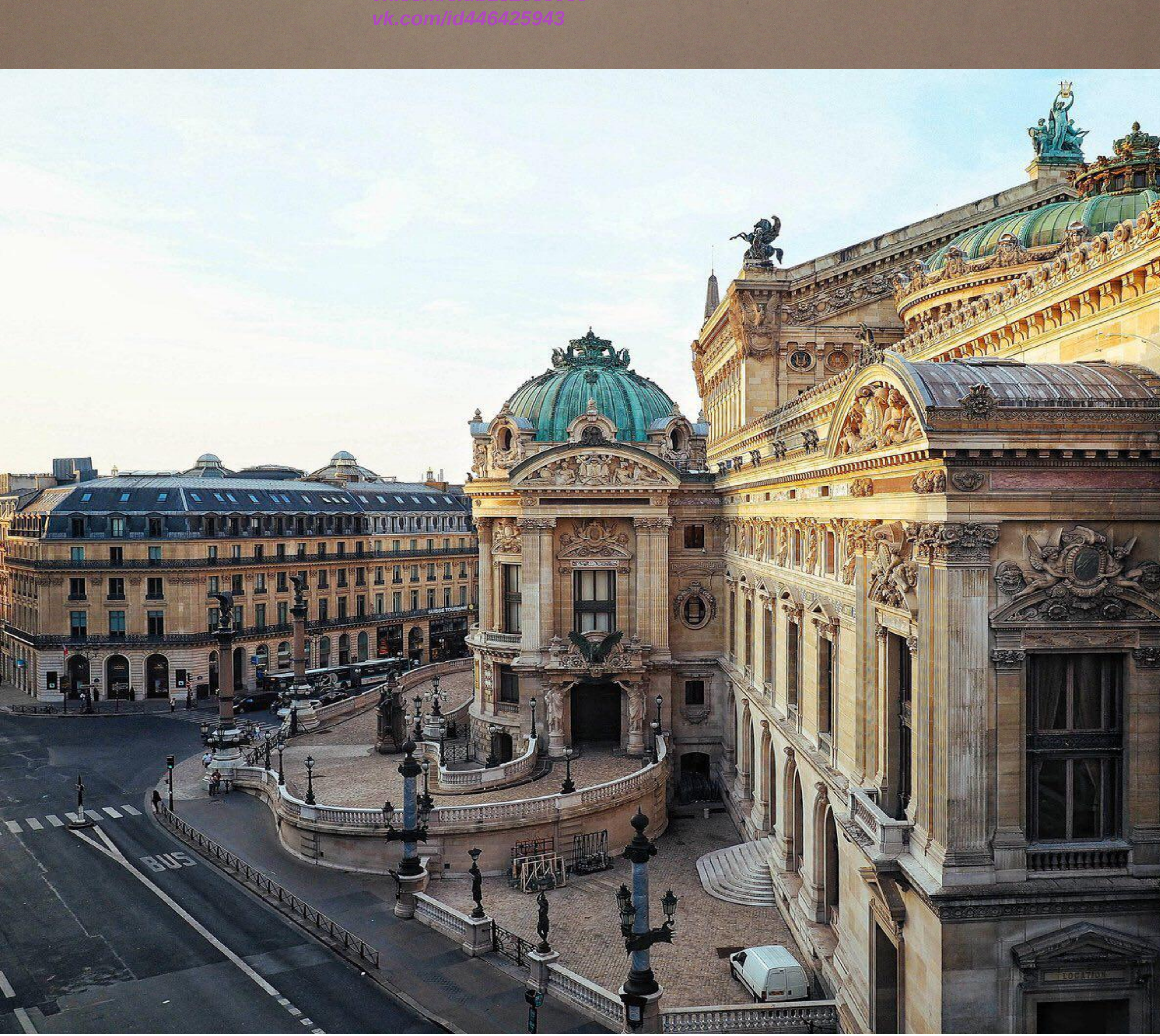
$$\theta_g = \frac{4 \cdot 3,14^2}{1,149^2} \cdot 0,005 + \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,56}{1,149^3} = 0,15 \text{ м/с}^2$$

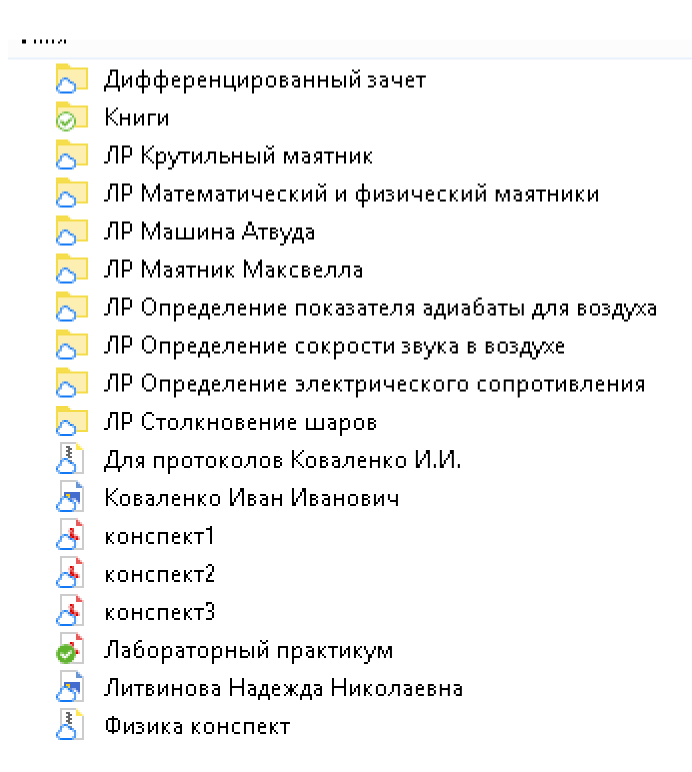
7. Вывод:

При измерениях математическим маятником ускорение свободного падения равно $g = (9{,}700 \pm 0{,}009)$ м/с² с вероятностью 98%

При измерениях физическим маятником ускорение свободного падения равно $g = (9{,}82 \pm 0{,}15)$ м/с² с вероятностью 98%

Ускорение свободного падения на земле равно 9,81 м/с². Данные расчеты показывают, что с учетом систематической погрешности число не точное, что говорит нам о неточности измерений, связанных с человеческим фактором при измерениях.




Дифференцированный зачет
Книги
ЛР Крутильный маятник
ЛР Математический и физический маятники
ЛР Машина Атвуда
ЛР Маятник Максвелла
ЛР Определение показателя адиабаты для воздуха
ЛР Определение сокрости звука в воздухе
ЛР Определение электрического сопротивления
ЛР Столкновение шаров
Для протоколов Коваленко И.И.
Коваленко Иван Иванович
конспект1
конспект2
конспект3
Лабораторный практикум
Литвинова Надежда Николаевна
Физика конспект


INTERNET ARCHIVE

Лабораторная работа № 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Цель работы: определение ускорения свободного падения, исследование момента инерции тонкого стержня.

Теоретические сведения

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси. Плоскость, проходящая через эту ось и центр тяжести вертикальна в положении равновесия. При отклонении маятника от этого положения возникают моменты сил, стремящиеся вернуть маятник в положение равновесия.

По основному уравнению динамики вращательного движения абсолютно твердого тела сумма моментов всех сил, приложенных к телу

$$\sum_i \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

В этой формуле I – момент инерции маятника относительно оси подвеса, $\vec{\varepsilon}$ – его угловое ускорение, а $\sum \vec{M}_i$ – сумма моментов всех сил, к этому маятнику приложенных.

На рис. 4.1 изображен физический маятник. Ось вращения отмечена буквой O, центр тяжести буквой C. Обозначим $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. К точке C приложены две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$.

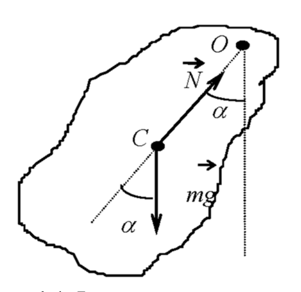


Рис. 4.1.Физический маятник

Поскольку сила $\vec{N}$ направлена вдоль отрезка $[OC]$, ее момент относительно оси O равен нулю, а сумма моментов этих сил

$$\overrightarrow{OC} \times m\vec{g} + \overrightarrow{OC} \times \vec{N} = \overrightarrow{OC} \times m\vec{g} = \vec{b} \times m\vec{g}.$$

Подставим результат в (4.1) и получим

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{b} \times m\vec{g}.$$

Спроектируем полученное выражение на направление оси вращения.

$$I\varepsilon = -mgb \cdot \sin\alpha.$$

Знак минус показывает, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия. Ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний, для которых $\sin\alpha = \alpha$, и учтем, что угловое ускорение есть вторая производная от угла отклонения по времени $\varepsilon = \alpha''(t)$,

$$\alpha''(t) + \frac{mgb}{I} \cdot \alpha(t) = 0. \quad (4.2)$$

Получившееся уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонических колебаний пружинного маятника

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (4.3)$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{mgb}{I}}$. (4.4)

Следовательно, при малых углах отклонения от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания

$$\alpha(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.5)$$

период которых зависит от момента инерции маятника относительно оси O, его массы и от расстояния между центром тяжести и этой осью:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.5) содержит две константы: амплитуду A и начальную фазу φ_o, значения которых определяются из начальных условий. Если секундомер включить в момент прохождения маятником положения равновесия, то $\varphi_0 = -90°$ и уравнение (4.5) перепишется в виде:

$$\alpha(t) = A\sin(\omega t). \quad (4.7)$$

В случае, когда физический маятник, совершающий малые колебания, представляет собой небольшое тело, подвешенное на легкой

длинной нерастяжимой нити, его можно считать математическим маятником. *Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, совершающая под действием силы тяжести малые колебания. Такие колебания являются гармоническими и описываются функциями (4.5) или (4.7).

Момент инерции математического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен $I = ml^2$, где l – длина нити. Подставляя это выражение в (4.4) и (4.6), найдем циклическую частоту и период колебаний математического маятника.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \tag{4.8}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{4.9}$$

Таким образом, частота и период колебаний математического маятника зависят от его длины и ускорения свободного падения. От массы маятника они не зависят.

Сравнивая друг с другом формулы (4.6) и (4.9), замечаем, что математический маятник с длиной нити

$$L = \frac{I}{mb}. \tag{4.10}$$

будет иметь такой же период колебаний, что и физический маятник. Величина, определяемая выражением (4.10), называется *приведенной длиной физического маятника*.

Рассмотрим физический маятник – тонкий длинный стержень. Найдём его момент инерции. Момент инерции любого твёрдого тела определяется относительно оси, вокруг которой происходит вращение или такое вращение гипотетически допустимо. Момент инерции материальной точки относительно оси, находящейся на расстоянии r от неё :

$$I = mr^2. \tag{4.11}$$

Направим вдоль стержня ось ox, начало координат поместим в середине. Выделим короткий участок стержня длиной dx в точке с координатой x (рис. 4.2).

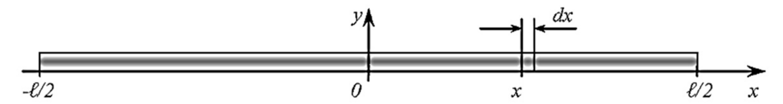


Рис. 4.2. К выводу момента инерции тонкого стержня

Масса стержня m, его длина ℓ. Момент инерции выделенного фрагмента стержня с массой dm:

$$dI = dmx^2.$$

Массу выделенного фрагмента dm можно найти из пропорции:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{\ell}; \qquad \Rightarrow \qquad dm = \frac{m}{\ell}dx.$$

Таким образом, для момента инерции фрагмента стержня имеем

$$dI = \frac{mx^2dx}{\ell}.$$

Момент инерции всего стержня I_o можно найти, проинтегрировав это выражение по всей длине от $-\ell/2$ до $\ell/2$.

$$I_0 = \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{mx^2dx}{\ell} = \frac{m}{\ell} \cdot \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2dx = \frac{mx^3}{3\ell}\Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m}{3\ell} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{m}{3\ell} \cdot \frac{\ell^3}{8} = \frac{m\ell^2}{12}.$$

Мы получили момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, который в дальнейшем будем называть I_o.

$$I_0 = \frac{m\ell^2}{12} \tag{4.12}$$

Во всех формулах, использованных раньше, рассматривался момент инерции стержня относительно оси подвеса, не проходящей через центр тяжести. Эти величины связаны друг с другом теоремой Штейнера $I = I_0 + mb^2$.

$$I = \frac{m\ell^2}{12} + mb^2, \tag{4.13}$$

где b – расстояние между центром тяжести и осью. Если ось проходит через край стержня, т.е. $b = \ell/2$, то момент инерции относительно нее

$$I_\ell = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}, \text{ т. е.}$$

$$I_\ell = \frac{m\ell^2}{3}. \tag{4.14}$$

Отметим, что формулы (4.12) и (4.14) являются частными случаями формулы (4.13) при $b = 0$ и при $b = \ell/2$. Вернёмся к общему случаю: подставим (4.13) в (4.6), преобразуем и получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12} + mb^2}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\ell^2}{12} + b^2}{gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}. \tag{4.15}$$

На рис. 4.3 приведён график получившейся зависимости. Видно, что у неё есть минимум при b 15 –18 см. Проведём анализ функции $T(b)$, найдём минимальное значение периода T и соответствующую координату b.

$$T'(b) = \frac{\left(\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}\right)'_b}{4\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}} = \frac{\frac{24b12gb - 12g\left(\ell^2 + 12b^2\right)}{(12gb)^2}}{4\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}} = \frac{12b^2 - \ell^2}{48gb^2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}}.$$

Приравняем производную нулю: $T'(b) = 0; \Rightarrow 12b^2 = \ell^2;$ $\Rightarrow b = \ell/\sqrt{12}$. Подставим получившееся значение b в формулу (4.15) и после вычислений получим минимальный период колебаний тонкого стержня.

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{3}g}}. \tag{4.16}$$

В написанной формуле ℓ – длина всего стержня, которая может быть без труда измерена, причём очень точно. Период колебаний измеряется тоже весьма точно.

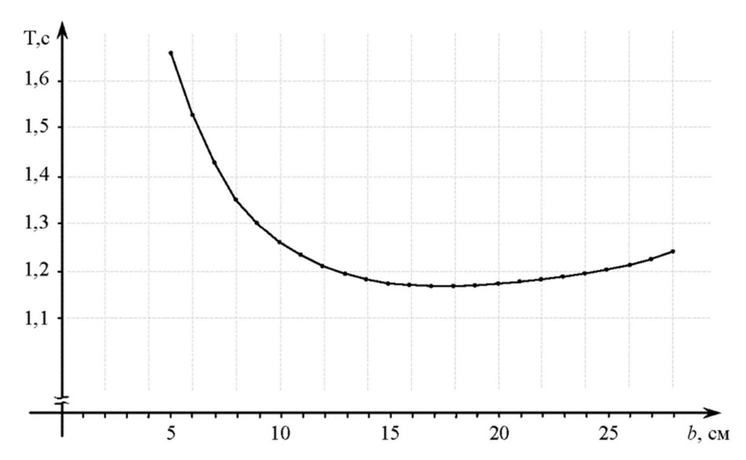


Рис. 4.3. График зависимости периода колебаний от параметра b

Для измерения ускорения свободного падения нужно измерить периоды колебаний физического маятника относительно нескольких осей, найти минимум, и по соответствующему периоду $T_{\min}$ и по длине всего стержня ℓ найти g по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2\sqrt{3}}. \qquad (4.17)$$

Снова вернёмся к уравнению (4.15) и перепишем его в виде

$$\frac{T^2 b}{4\pi^2} = \frac{\ell^2}{12g} + \frac{b^2}{g}. \qquad (4.18)$$

Введём обозначения:

$$Y = \frac{T^2 b}{4\pi^2}, \quad Y_0 = \frac{\ell^2}{12g}, \quad k = \frac{1}{g}, \quad z = b^2 \qquad (4.19)$$

и получим функцию $Y(z)$ (рис. 4.4):

$$Y = Y_0 + k \cdot z. \qquad (4.20)$$

Физический смысл величин: $Y = I/m$ – момент инерции тела, делённый на его массу; $Y_o = I_o/m$ – момент инерции тела относительно центра тяжести стержня, делённый на его массу.

Угловой коэффициент этой функции $k = 1/g$. Значения этой функции Y и её аргумента z могут быть вычислены по измеренным значениям T и b. Функция (4.20) – это другая форма записи функции (4.13).

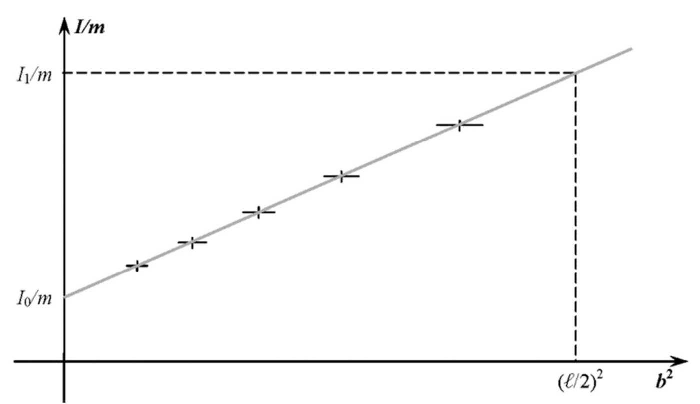


Рис. 4.4. Зависимость приведенного момента инерции от положения оси маятника

Лабораторная установка

Внешний вид установки приведен на рис. 4.5. Установка состоит из математического и физического маятников. Математический маятник выполнен в виде металлического шарика 1 на бифилярном подвесе 2. Длина подвеса измеряется линейкой на стойке 3.

Физический маятник есть металлический стержень 4, на котором крепится подвижная ось – опорная призма 5. Фотодатчик 6 на нижнем кронштейне сигнализирует о прохождении маятником положения равновесия. Время измеряется миллисекундомером, а число колебаний специальным счетчиком. Прибор включается нажатием кнопки “Сеть”. Кнопка “Сброс” служит для установки нуля. Нажатие кнопки “Стоп” выключает прибор после окончания текущего колебания. Для упрощения измерения расстояния на стержне через каждый сантиметр нанесены риски. Кроме того, на установке имеется специальная измерительная линейка.

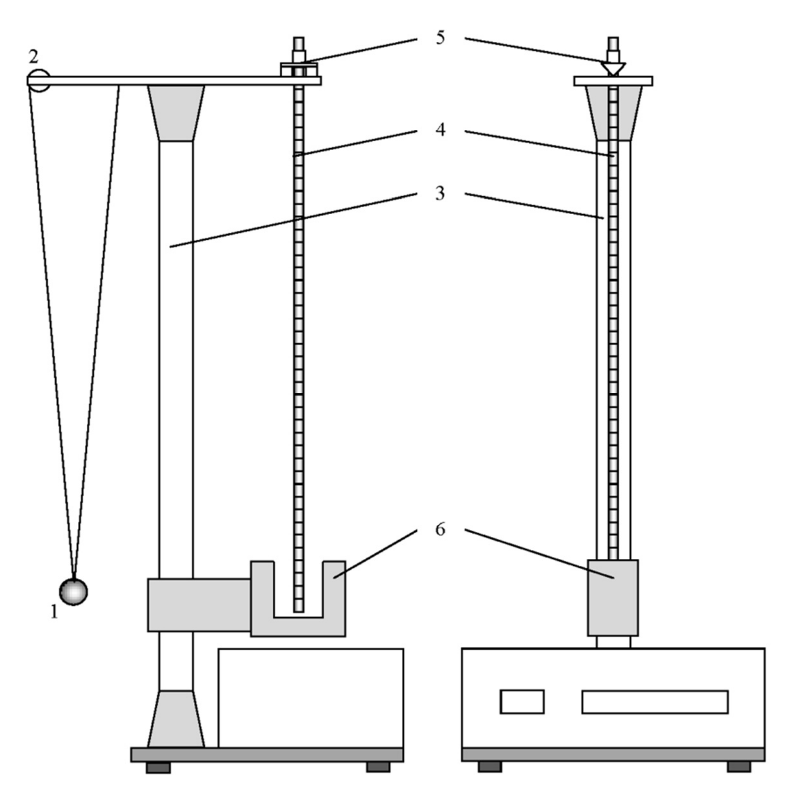


Рис. 4.5. Внешний вид лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

Задание 1. Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

Верхнюю планку следует развернуть так, чтобы математический маятник оказался над фотодатчиком, таким образом, чтобы в положении равновесия он пересекал оптическую ось.

Перед началом измерений нажимают кнопку “Сброс”. Шарик отклоняют на небольшой угол ~4–5° и осторожно без толчка отпускают. Когда на счетчике колебаний появляется цифра 9, нажимают кнопку “Стоп”. В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний, и найти их средний период будет очень просто.

Определение периода колебаний проводится таким методом не менее 5 раз при различных длинах маятника ℓ. Для каждого значения периода и соответствующей длины при помощи формулы (4.9), переписанной в явном виде:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2},$$

находится ускорение свободного падения. Необходимо провести стандартную математическую обработку результатов измерения g, считая все вычисленные значения случайными величинами. При определении систематической погрешности считать θ_ℓ = 0,5 см, θ_T = 0,001 с.

Задание 2. Определение ускорения свободного падения при помощи физического маятника.

Верхнюю планку повернуть так, чтобы нижняя часть оси физического маятника проходила через прорезь фотодатчика. Отклонить маятник на небольшой угол ~ 4–5° и осторожно без толчка отпустить его. Нажать кнопку “Сброс”; включится секундомер и счетчик колебаний. Когда на счетчике колебаний появится цифра 9, нажать кнопку “Стоп”. В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний и найти их средний период $T_о$ будет очень просто.

Измерения провести для шести положений оси на расстояниях 10–15 см от края стержня по три раза в каждом положении. Во время измерений заполнять табл. 4.1.

Таблица 4.1

x, см	10	11	12	13	14	15
T_1, с						
T_2, с						
T_3, с						
$T_{ср}$, с						

Анализируя данные таблицы нужно найти минимум среднего периода колебаний и по формуле (4.17) определить ускорение свободного падения.

Необходимо провести стандартную математическую обработку результатов измерения g, считая данные каждого столбца случайными величинами T_1, T_2, T_3. При определении систематической погрешности считать $\theta_\ell = 0{,}5$ мм, $\theta_T = 0{,}001$ с.

Задание 3. Изучение свойств момента инерции тонкого стержня.

Необходимо получить серию из 6–8 измерений $T(b)$, где b – расстояние между центром масс тела и осью подвеса (рис. 4.6).

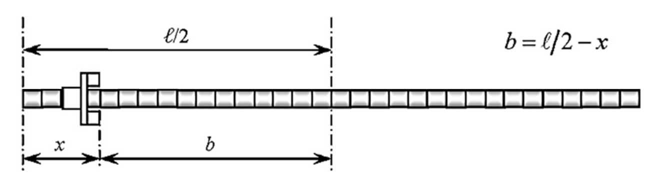


Рис. 4.6. Положение оси подвеса маятника

Значения b нужно менять во всём диапазоне значений – от $b_{\min}$ = = 2 см до $b_{\max}$ = 27 см. Результаты измерений и вычислений следует оформить в виде табл. 4.2. Обрабатывать следует результаты, полученные во второй и в третьей частях работы.

Величину Y следует вычислять по формуле (4.19).

Формулу для вычисления систематической погрешности θ_Y нужно получить самостоятельно.

При вычислениях погрешности использовать $\theta_b = 0{,}5$ мм, $\theta_T = 0{,}001$ с.

Таблица 4.2

№	1	2	3	4	5	6 ...
T, с						
x, м						
b, м						
Y, м^2						
θ_Y, м^2						

Измеренные и вычисленные результаты из табл. 4.2 нужно отложить на графике, как на рис. 4.2. Через получившиеся точки (крестики) на графике нужно провести прямую линию. Эта линия должна быть экстраполирована, т.е. продолжена до значений $z = 0$ и $z = (\ell/2)^2$.

Анализируя построенный график нужно убедиться в следующем:

получившаяся зависимость линейна;

$I_1/I_0 = 4$.

Контрольные вопросы

1. Какие тела называются математическим и физическим маятниками?
2. Напишите дифференциальные уравнения колебаний физического и пружинного маятников, а также их решения.
3. Каким образом по начальному отклонению и начальной скорости маятника найти амплитуду и начальную фазу колебаний?
4. Напишите формулы для периодов и частот колебаний пружинного, физического и математического маятников.
5. В чем состоит содержание теоремы Штейнера?
6. Что называется приведенной длиной физического маятника?
7. Почему значение g во втором задании находится без использования величины b?
8. Почему I_1 должен быть в четыре раза больше, чем I_0?